

CONFORMACIÓN ROBUSTA DE HAZ EN ARRAYS DE ANTENAS

Talesa Sesé Paules César Caballero Gaudes Enrique Masgrau Gómez
Grupo de Tecnologías de las Comunicaciones, Instituto de Investigación en Ingeniería de Aragón, I3A
Universidad de Zaragoza
{tsese, ccaballe, masgrau}@unizar.es

Abstract- Herein we consider robust beamforming in array processing applications when used for estimating an unknown waveform from a source impinging on an array of sensors. With exactly source direction of arrival knowledge and infinite training snapshots, the MVDR beamformer achieves optimal operation, providing a distortionless version of the signal while suppressing noise and interference. Unfortunately, its performance is known to degrade severely in practical situations, where the knowledge of the SOI steering vector can be imprecise if some of the assumptions on the sensor array or the environment are violated. Similar degradation occurs when the number of available snapshots for statistical training is limited. In this paper, we review different approaches that have been proposed to improve the robustness of the MVDR beamformer and compare its performance for power estimation and waveform detection applications.

I. INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, el procesado en arrays de antenas ha recibido una considerable atención debido a su extendida utilización en meteorología, radioastronomía, radar, sónar y comunicaciones móviles. El objetivo de este artículo es el análisis y evaluación de varios sistemas de conformación robusta de haz que, basados en el algoritmo MVDR [1], mejoran las prestaciones que éste ofrece en situaciones prácticas en las que suelen producirse desajustes entre el modelo de señal asumido y el real. En un escenario real, las causas más frecuentes de estos desajustes son [2]:

- *Errores en la estimación del ángulo de llegada de la fuente de interés o un incorrecta calibración del array* [3].
- *Errores debidos a la limitación en el número de observaciones (snapshots) utilizado para estimar la estadística de la señal.* Estos problemas pueden solventarse empleando carga diagonal o limitando la norma del vector de coeficientes del array [4]-[6].
- *Errores debidos a la propagación multitrayecto de las señales recibidas,* que precisan de soluciones robustas para decorrelar la señal deseada y las interferencias [8][9].
- *Errores en el frente de ondas de la señal a la salida del canal,* que están asociados a la existencia de ruido multiplicativo o difusión de la señal. Para luchar contra este tipo de errores, pueden utilizarse conformadores de

haz cuadráticos [10] o conformadores basados en modelos de señales de rango general [9].

- *Las señales interferentes presentan una movilidad más rápida que la actualización de los coeficientes del array:* Los conformadores basados en restricciones de derivadas [11] y en el uso de *covariance matrix tapers* (CMT) [12] robustecen la respuesta del array frente a este tipo de desajustes.

II. MODELO DE SEÑAL

Consideremos un array lineal con M antenas omnidireccionales equiespaciadas una distancia d (ULA), sobre el que incide un frente de ondas planas. La señal a la salida de un conformador de banda estrecha es:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t), \quad (1)$$

donde t es el índice temporal, $\mathbf{x}(t)=[x_1(t), \dots, x_M(t)]^T \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ es el vector de señal recibida (*snapshot*), $\mathbf{w}=[w_1, \dots, w_M]^T \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ es el vector de pesos del conformador, $(\bullet)^T$ y $(\bullet)^H$ denotan el operador traspuesto y traspuesto conjugado, respectivamente. En banda estrecha, el vector *snapshot* se define como:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{s}(t) + \mathbf{i}(t) + \mathbf{n}(t) \\ &= s(t)\mathbf{a}(\theta_0) + \sum_{k=1}^K i_k(t)\mathbf{a}(\theta_k) + \mathbf{n}(t) \end{aligned} \quad (2)$$

donde $\mathbf{s}(t)$, $\mathbf{i}(t)$ y $\mathbf{n}(t)$ son respectivamente la señal de interés (SOI), la componente de señal interferente y el ruido aditivo, respectivamente. El número de señales interferentes es K . Los términos $s(t)$ e $i_k(t)$ representan las formas de onda de SOI y las señales interferentes. En un array ULA, utilizando como referencia el primer sensor, el vector de direccionamiento de una señal incidente $\mathbf{a}(\theta)$ por una cierta dirección de llegada θ se define como:

$$\mathbf{a}(\theta) = \begin{bmatrix} 1, e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}d\text{sen}\theta}, \dots, e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(M-1)d\text{sen}\theta} \end{bmatrix}.$$

Asumiremos que las señales incidentes en el array son independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d). Por tanto, la matriz de covarianza \mathbf{R} de la señal recibida toma la siguiente forma:

$$\mathbf{R} = \sigma_0^2 \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_0^H + \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^H + \mathbf{Q} \quad (3)$$

ALGORITMO	Función de optimización	Conformador
DL [4]	$\min_w \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w} + \alpha \mathbf{w}^H \mathbf{w} \quad \text{sujeto a} \quad \mathbf{w}^H \mathbf{a}_0 = 1$ <p>α es el factor de carga diagonal</p>	$\mathbf{w}_0 = \frac{(\mathbf{R} + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{a}_0}{\mathbf{a}_0^H (\mathbf{R} + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{a}_0}$
DCRCB [7]	$\min_{\mathbf{a}} \mathbf{a}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a} \quad \text{con} \quad \ \mathbf{a} - \bar{\mathbf{a}}\ ^2 \leq \varepsilon, \quad \ \mathbf{a}\ ^2 = M$ <p>ε es una constante positiva de control</p>	$\mathbf{w}_0 = \frac{1}{M - \frac{\varepsilon}{2}} \left[\bar{\mathbf{a}}^H (\mathbf{R} + \frac{1}{2} \mathbf{I})^{-1} \mathbf{R} \bar{\mathbf{a}} \right] \frac{(\mathbf{R} + \frac{1}{2} \mathbf{I})^{-1} \bar{\mathbf{a}}}{\bar{\mathbf{a}}^H (\mathbf{R} + \frac{1}{2} \mathbf{I})^{-1} \mathbf{R} (\mathbf{R} + \frac{1}{2} \mathbf{I})^{-1} \bar{\mathbf{a}}}$
GRSM [9]	$\min_w \mathbf{w}^H (\mathbf{R} + \gamma \mathbf{I}) \mathbf{w} \quad \text{sujeto a} \quad \mathbf{w}^H (\mathbf{R}_s + \varepsilon \mathbf{I}) \mathbf{w} = 1$ <p>γ, ε constantes positivas de diseño</p>	$\mathbf{w}_0 = \wp \left\{ (\mathbf{R} + \gamma \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{R}_s - \varepsilon \mathbf{I}) \right\}$ <p>\wp calcula el vector propio principal</p>
CMT [11]	$\min_w \mathbf{w}^H \mathbf{R}_m \mathbf{w} \quad \text{sujeto a} \quad \mathbf{w}^H \mathbf{a}_0 = 1 \quad \text{con} \quad \mathbf{R}_m = \mathbf{R} \circ \mathbf{T}$ <p>\mathbf{T} es la matriz de coeficientes y \circ el producto elemento a elemento</p>	$\mathbf{w}_0 = \frac{\mathbf{R}_m^{-1} \mathbf{a}_0}{\mathbf{a}_0^H \mathbf{R}_m^{-1} \mathbf{a}_0}$

Tabla I: Formulación y solución de los algoritmos propuestos

donde σ_0^2 y σ_k^2 , $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}(\theta_0)$ y $\mathbf{a}_k = \mathbf{a}(\theta_k)$, $k = 1, \dots, K$, son las potencias y los vectores de direccionamiento de la señal deseada y las K señales interferentes con direcciones de llegada θ_0 y θ_k , respectivamente. \mathbf{Q} es la matriz de covarianza del ruido. En la práctica, la matriz \mathbf{R} se desconoce y debe estimarse a partir de N observaciones de la señal recibida:

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}(n) \mathbf{x}(n)^H. \quad (4)$$

Uno de los algoritmos tradicionales de conformación de haz con referencia espacial es el algoritmo MVDR que proporciona la respuesta de mínima energía a la salida del array sin distorsión en la dirección de interés,

$$\min_w \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w} \quad \text{sujeto a} \quad \mathbf{w}^H \mathbf{a}_0 = 1. \quad (5)$$

Los pesos solución del problema MVDR son:

$$\mathbf{w}_0 = \frac{\mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}_0}{\mathbf{a}_0^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}_0} \quad (6)$$

Se puede demostrar que la estimación de potencia de señal deseada a la salida del conformador es [1]:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \mathbf{w}_0^H \mathbf{R} \mathbf{w}_0 = \frac{1}{\mathbf{a}_0^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}_0} \quad (7)$$

III. CONFORMACIÓN ROBUSTA DE HAZ

Debido a la pérdida de prestaciones del conformador MVDR cuando existen desajustes entre el modelo de señal asumido y el modelo real, resulta de especial interés el diseño de algoritmos que incrementen la robustez del conformador frente a estas no idealidades. En esta sección se describen de forma cualitativa algunos de los algoritmos de conformación de haz robusta presentados recientemente en la literatura. En la tabla I, se muestra la formulación de los algoritmos presentados y su correspondiente conformador.

Una solución tradicional para incrementar la robustez del conformador MVDR es el conformador de carga diagonal (DL). Este método se deriva imponiendo una restricción

cuadrática adicional que limita la norma de los coeficientes del conformador MVDR. La solución del método DL conlleva la suma de una matriz diagonal a la matriz de covarianza \mathbf{R} , consiguiendo de esta forma minimizar la dispersión de autovalores de la matriz cuando el número de snapshots disponibles es insuficiente [4]. Igualmente, esta solución incrementa la robustez frente a errores en el vector de direccionamiento SOI [4]. El mayor inconveniente de esta solución DL es que no existe una forma fiable de elegir el valor adecuado para el factor de carga puesto que éste depende de las características propias de cada escenario. Para evitar una elección *ad hoc* del factor de carga diagonal, en los últimos años se han propuesto algunos algoritmos que imponiendo un rango continuo de restricciones de no distorsión de la señal deseada, consiguen robustecer la respuesta del conformador con una elección más inteligente del factor carga diagonal [5]-[7][9].

El planteamiento propuesto en [6] es estimar el vector de direccionamiento de la señal deseada, maximizando la estimación de potencia de la señal deseada y forzando a que el vector pertenezca a un cierto campo de incertidumbre elipsoidal. A partir del vector de direccionamiento estimado se calculan los coeficientes del array mediante (6). Siguiendo la misma interpretación, el algoritmo *Doubly constrained robust Capon beamformer* (DCRCB) busca mejorar la robustez del MVDR forzando una restricción adicional en la norma del vector de direccionamiento estimado [7].

Para asegurar una correcta operación del conformador en escenarios donde las señales incidentes presentan movilidad alrededor de una dirección incidente, la respuesta del conformador debe ser constante en ese rango de direcciones. Tradicionalmente, este objetivo se consigue imponiendo restricciones de derivadas en lugar de restricciones puntuales en el problema de minimización. Otra posible solución es utilizar la técnica basada en *Covariance matrix tapers* (CMT) [11][12], que consiste en la sustitución de la matriz de covarianza original por otra obtenida tras multiplicar punto a punto (producto Schur-Hadamard) la matriz original por una matriz de coeficientes. El propósito es incrementar la anchura de los nulos en la dirección de las señales incidentes. En [11] se demuestra que ambos métodos, CMT y restricciones de derivadas, son equivalentes.

ALGORITMO	Ventajas	Inconvenientes
DL	- Sencillez y complejidad limitada.	- No hay una forma exacta de elegir el factor de carga diagonal.
DCRCB	- Introduce un campo de incertidumbre a la formulación del problema para la elección del factor de carga diagonal.	- Su parámetro ϵ debe ser mayor que el desajuste (ϵ_0) para obtener las mejores prestaciones.
GRSM	- Aplicable en señales de rango general.	- El parámetro ϵ debe ser próximo al desajuste para obtener una buena estimación de potencia.
CMT	- Útil en escenarios con fuentes interferentes móviles. - Incrementa la anchura de la respuesta del array en la dirección de las señales incidentes.	- No ofrece una elevada robustez frente a desajustes en la estimación del DOA.

Tabla II: Ventajas e inconvenientes de los conformadores presentados

En todos los algoritmos anteriores se asume un modelo de fuente de señal puntual y su extensión a modelos de señal de rango superior no es sencilla. En la práctica, el rango del subespacio de la señal deseada puede ser mayor que uno, por ejemplo, debido a la propagación multitrayecto, teniendo que implementar un conformador de haz para señales de rango general (GRSM) [9]. La idea presentada en [9] se basa en la optimización del peor escenario posible [5].

IV. SIMULACIONES Y RESULTADOS

En las simulaciones asumiremos un ULA de $M=10$ sensores separados media longitud de onda ($d=\lambda/2$), un ruido AWGN con $\mathbf{Q}=\mathbf{I}$, y señales QPSK i.i.d. La potencia de la SOI es de $\sigma_0^2 = 10$ dB, mientras que la potencia de cada interferencia es de $\sigma_k^2 = 30$ dB. El DOA de la SOI es $\theta_0=0^\circ$, siendo para las interferencias $\theta_1 = -30^\circ$, $\theta_2 = 20^\circ$, $\theta_3 = 40^\circ$. Para calcular la matriz de covarianza muestreada $\hat{\mathbf{R}}$ se dispone de $N = 100$ observaciones. Para evaluar las prestaciones de los algoritmos de una forma realista, se simulará un escenario con un error en el vector de direccionamiento de la señal deseada, definiéndose este error como [6]:

$$\epsilon_0 = \|\mathbf{a}_0 - \bar{\mathbf{a}}\|^2, \quad (6)$$

donde $\bar{\mathbf{a}}$ es el vector de direccionamiento asumido. En las Figuras 1 y 4 se modela un desajuste en el DOA estimado de $\Delta=2^\circ$; así el vector de direccionamiento asumido es $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}(\theta_0+\Delta)$. En las Figuras 2, 3 y 5, simularemos un error de calibración en el array, perturbando cada elemento del vector \mathbf{a}_0 con un ruido gaussiano de modo que $\epsilon_0 = 1$. Los parámetros de control de cada algoritmo serán: DL ($\alpha=10$), CMT (*orden derivadas*=3), DCRCB ($\epsilon=1.5$), GRSM ($\epsilon=1.3$, $\gamma=0$). En todas las figuras, se incluye como referencia el valor alcanzado por el conformador MVDR utilizando la matriz de covarianza teórica \mathbf{R} definida en (3).

La Fig. 1 muestra el valor de relación señal a ruido-interferencia (SINR) en función de SNR. Se observa que los algoritmos DCRCB y CMT consiguen mejores prestaciones que GRSM y DL para los parámetros de control utilizados. Experimentalmente se ha comprobado que se puede mejorar la SINR alcanzada por el GRSM utilizando una carga diagonal no nula ($\gamma \neq 0$). El método DL alcanza su máximo para un rango de SNR determinado. Este rango depende del factor de carga diagonal elegido para cada escenario. Un relación habitual es escoger un valor 5 ó 10 veces la potencia de ruido, en este caso igual a 1.

En la Fig. 2 se estudia cómo afecta a las prestaciones del array la proximidad entre una señal interferente y la SOI.

Para simular este escenario, la segunda señal interferente varía su dirección θ_2 entre $[-20^\circ, 20^\circ]$. Como se observa el algoritmo menos robusto es el CMT, alcanzando un valor de SINR muy por debajo del teórico en un margen aproximadamente comprendido entre $[-8^\circ, 10^\circ]$. El método DL se aproxima a su mejor valor en un menor rango de proximidad $[-2^\circ, 5^\circ]$, pero son los algoritmos DCRCB y GRSM los que logran mayor fiabilidad y mejores prestaciones.

El esquema presentado en la Fig. 3 se basa en una aplicación de estimación de potencia de las señales existentes en el escenario. En este caso, los conformadores DCRCB y GRSM presentan una mayor resolución entre señales y mayor precisión en la estima. Los otros dos métodos, aunque detectan la presencia de señal incidente, proporcionan una estimación alejada del valor real y presentan menor resolución, especialmente al utilizar CMT.

En la Fig. 4 se modela una situación en la que la potencia de la señal deseada, definida igual que SNR, es variable. Se observa que los algoritmos DCRCB, GRSM y CMT siguen el crecimiento en la potencia de señal, mientras que la estimación ofrecida por el método DL sólo es válida para un rango de potencias que depende de la carga diagonal elegida, por el mismo motivo que en la Fig. 1.

De forma similar a la Fig.2, en la Fig. 5 se estudia cómo se ve afectada la estimación de potencia por la proximidad de un señal interferente. Todos los métodos estiman una potencia aproximadamente de 30 dB (recordar que la SOI tiene 10 dB y la interferencia de 30 dB) cuando ambas señales se aproximan en ángulo de incidencia. Utilizar el método DL es más robusto cuando las señales inciden por ángulos muy próximos, sin embargo su estimación de potencia no es precisa para señales más separadas. Reparar que, en todas las figuras de estimación, el algoritmo DCRCB siempre estima un valor superior al valor real de potencia.

V. CONCLUSIONES

En este artículo se han analizado y evaluado distintas técnicas de conformación robusta de haz, que mantienen una buena resolución y capacidad de rechazo de interferencias en condiciones en las que el conformador MVDR no consigue unas prestaciones adecuadas. La comparación de los algoritmos se ha realizado en términos de SINR y su capacidad de estimación de potencia de la señal deseada. En la tabla II se resumen las principales virtudes y desventajas de estos algoritmos.

REFERENCIAS

- [1] H.L. Van Trees. *Detection, Estimation, and modulation theory, Part IV, Optimum Array Processing*. Wiley, New York, 2002.
- [2] A.B. Gershman: "Robust adaptive beamforming in sensor arrays", *Int. Journal of Electronics and Communications*, vol. 53, Dec. 1999.
- [3] H. Cox, et. al., "Robust adaptive beamforming," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 35, Oct. 1987.
- [4] B.D. Carlson, "Covariance matrix estimation errors and diagonal loading in adaptive arrays," *IEEE Trans. Aerosp. Elec. Syst.* vol. 24, July 1988.
- [5] S. Vorobyov, et. al. , "Robust adaptive beamforming using worst case performance optimization: a solution to the signal mismatch problem," *IEEE Trans. Signal Proc.* vol. 51, Feb. 2003.
- [6] J. Li, P. Stoica, and Z. Wang: "On robust Capon beamformer and diagonal loading," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 51, July 2003.
- [7] J. Li, P. Stoica, Z. Wang, "Doubly constrained robust Capon Beamformer," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 52, Sep. 2004.
- [8] M.D. Zoltowski: "On the performance of the MVDR beamformer in the presence of correlated interference," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 36, June 1988.
- [9] S. Shahbazpanahi, A.B. Gershman, Z.Q. Luo, and K.M. Wong: "Robust adaptive beamforming for general-rank signal models," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 51, Sept. 2003
- [10] E.Y. Gorodetskaya, et. al, "Deep-water acoustic coherence at long ranges: Theoretical prediction and effects on large-array signal processing". *IEEE Journal Oceanic Engineering*, vol. 24, April 1999.

- [11] Zatman, M. A. "Comment on Theory and application of covariance matrix tapers for robust adaptive beamforming". *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 48, June 2000.
- [12] J. Riba, J. Goldberg, and G. Vazquez, "Robust beamforming for interference rejection in mobile communications," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 45, Jan. 1997

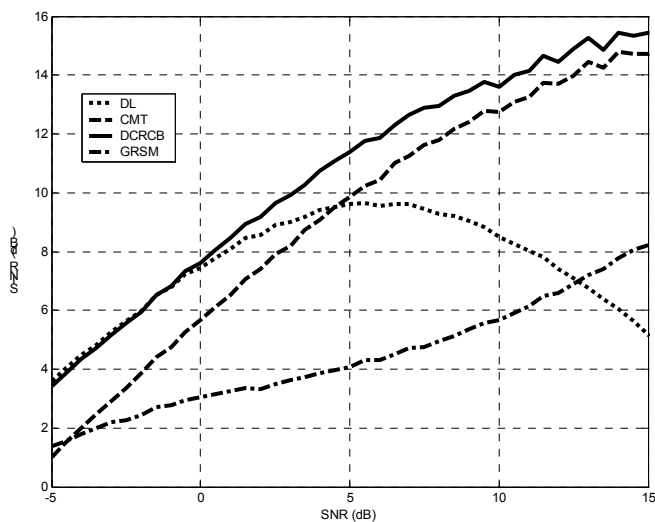


Fig. 1: SINR versus SNR (error desajuste DOA)

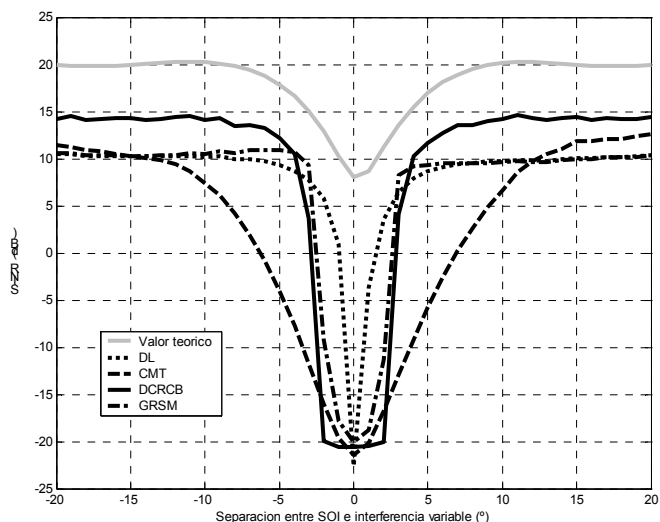


Fig. 2 SINR vs. Proximidad de la interferencia (error de calibración)

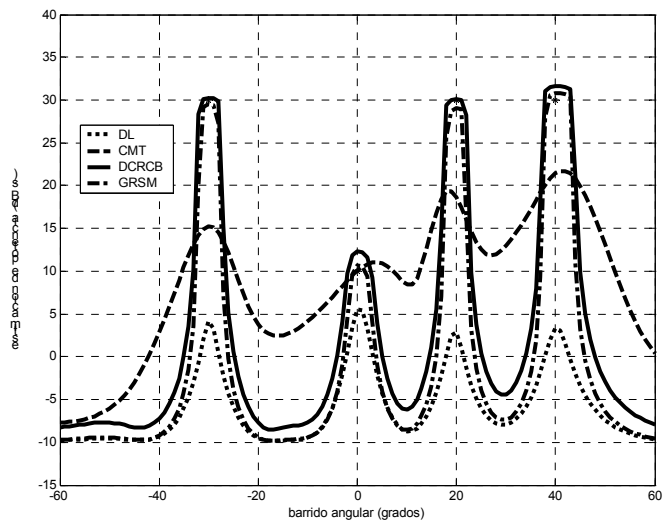


Fig. 3 Estimación de potencia de señales incidentes (error calibración)

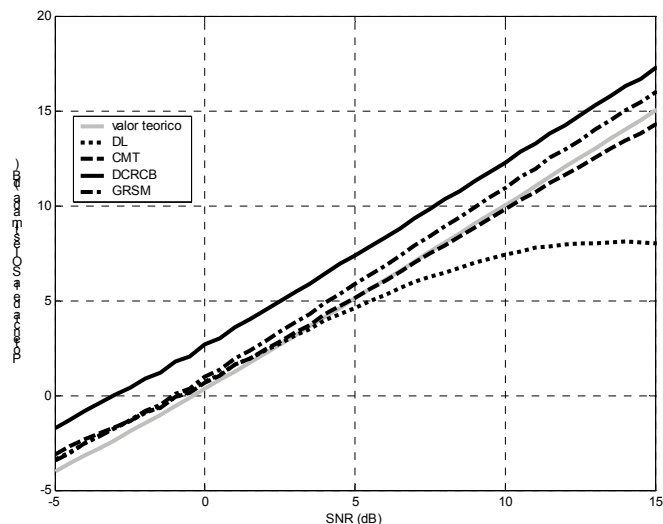


Fig. 4 Estimación de potencia de SOI vs. SNR (error desajuste DOA)

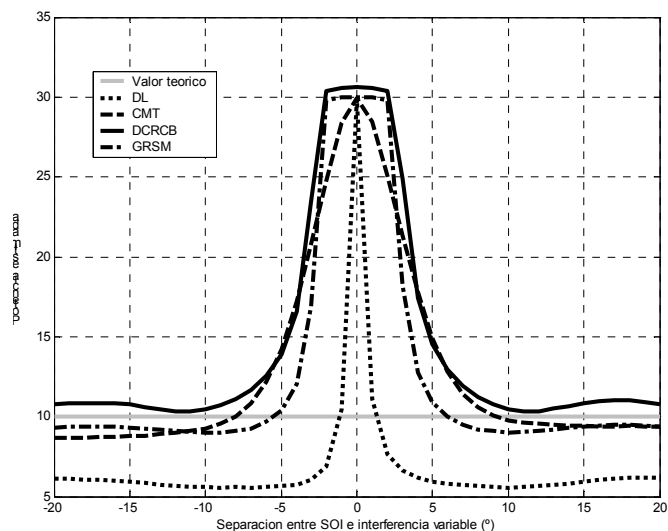


Fig. 5 Estimación de potencia de SOI vs. Proximidad de la interferencia (error de calibración)